КОНСПЕКТ

Содержание …………………………………………………………………….. стр.

ПРЕДМЕТ КУРСА

Предметом курса «Теория электрических и магнитных цепей» (ТЭМЦ) является изучение электромагнитных процессов, происходящих в электрических цепях. Курс ТЭМЦ является фундаментом, на котором базируется изучение всех специальных электротехнических дисциплин, а сам он базируется на знаниях, полученных в курсах физики и математики.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Электрической цепью называется совокупность устройств, предназначенных для создания, передачи и преобразования электрической энергии. Все устройства, образующие электрическую цепь, делятся на группы: а) источники электрической энергии; б) приемники электрической энергии; в) линии связи (соединительные провода); г) контрольно-измерительные приборы.

В источниках электрической энергии (электромашинные генераторы, термогенераторы, батареи аккумуляторов, солнечные батареи и т.д.) различные виды энергии (механическая, тепловая, химическая, световая и т.д.) преобразуются в электрическую.

В приемниках электрической энергии происходит обратный процесс: электрическая энергия преобразуется в какой-либо другой вид энергии (тепловую, световую, механическую, химическую и т.д.). Возможность несложного преобразования электричества в другие виды энергии и наоборот является одной из причин чрезвычайно широкого распространения электричества.

Линии связи предназначены для соединения источников с приемниками.

Контрольно-измерительные приборы (КИП) служат для измерения и контроля величин, характеризующих работу электрической цепи.

Курс ТЭМЦ оперирует следующими понятиями:

Электрический ток – это упорядоченное движение носителей электрического заряда. Численно он равен скорости изменения заряда, проходящего через поперечное сечение проводника: $i = \frac{dq}{dt}$. Единица измерения тока – Ампер (А).

Потенциал - работа (энергия) по перемещению единичного заряда (1 Кл) из точки с нулевым потенциалом в рассматриваемую точку. Единица измерения потенциала–Вольт (В).

Разность потенциалов точек a и b называется *напряжением* между этими точками:

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b .$$

При перемещении электрического заряда 1 Кл между точками электрической цепи, разность потенциалов которых равна 1 В, совершается работа 1 Дж.

Ток и напряжение – скалярные величины, имеющие определённое направление. Условно положительным направлением тока выбрано направление переноса положительных зарядов, а напряжения - направление от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом.

Всё многообразие потребителей (приемников энергии) можно представить следующими идеализированными элементами:

1.) резистивный элемент (условное обозначение на рис. 1.1 - а)линейный; б) нелинейный) - учитывает преобразование электрической энергии в тепловую, его сопротивление обусловлено столкновением движущихся зарядов с молекулами вещества. При этом электрическая энергия переходит в тепло, не накапливаясь в элементе

Резистивный элемент характеризуется связью между током и напряжением, так

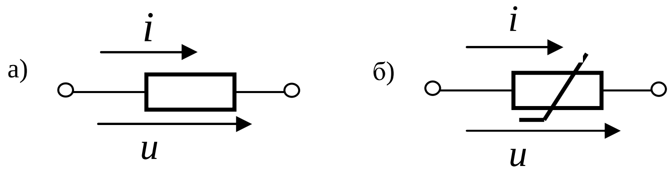


Рис. 1.1

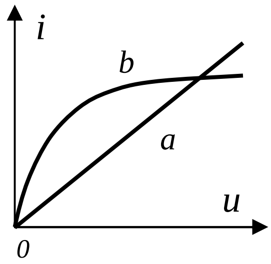


Рис. 1.2

называемой вольт-амперной характеристикой (ВАХ) $i = f(u)$, которая представлена на рис.1.2 (a - линейный резистор; b – нелинейный).

Для линейного резистора справедлив

закон Ома: $i = u/r$. Здесь r – коэффициент пропорциональности, называемый резистивным сопротивлением элемента; измеряется в Омах (Ом).

2.) Индуктивный элемент (рис. 1.3 , а) - линейный; б) - нелинейный) учитывает наличие магнитного поля в устройстве. Оказывает сопротивление только переменному току. Сопротивление обусловлено ЭДС самоиндукции, которая действует встречно току при его увеличении и в обратном направлении – при его уменьшении. В индуктивном элементе

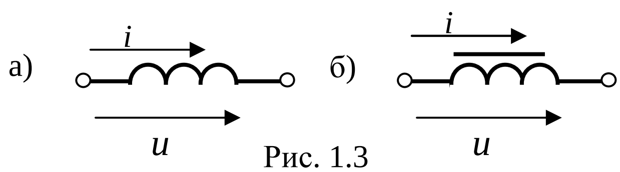


Рис. 1.3

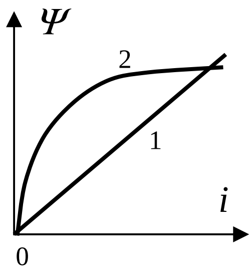


Рис. 1.4

происходит накопление энергии магнитного поля. Индуктивный элемент характеризуется зависимостью потокосцепления от тока, так называемой вебер-амперной характеристикой (ВбАх) $\Psi = f(i)$, которая представлена на рис. 1.4; (1 – линейная, 2 – нелинейная индуктивности).

Связь между потокосцеплением (током) и напряжением выражается законом электромагнитной индукции

$$u_L(\mathrm{t}) = \frac{d\Psi}{dt}; \quad \Psi(t) = \int_{-\infty}^{t} u_L(t)dt = \Psi(0) + \int_{0}^{t} u_L(t)dt.$$

Для линейного индуктивного элемента - $\Psi = L\ i$, где L – коэффициент пропорциональности, называемый индуктивностью; измеряется в Генри (Гн).

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}; \qquad i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t)dt.$$

3.) Ёмкостный элемент (рис. 1.5 - а) линейный; б) нелинейный; учитывает наличие электрического поля в устройстве. В нём энергия движения зарядов переходит в потенциальную энергию электрического поля, которая может накапливаться в элементе.

Характеризуется зависимостью заряда от напряжения, так называемой кулон-вольтной характеристикой (КВх) $q = f(u)$ (рис. 1.6; 1 – линейная, 2 – нелинейная ёмкости): Связь между зарядом (напряжением) и током осуществляется по следующим формулам

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt}; \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i_C(t)dt = q(0) + \int_0^t i_C(t)dt.$$

Для линейного ёмкостного элемента $q = C\,u$,
где : C - коэффициент пропорциональности, называемый ёмкостью; измеряется в Фарадах (Ф).

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt}; \qquad u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt.$$

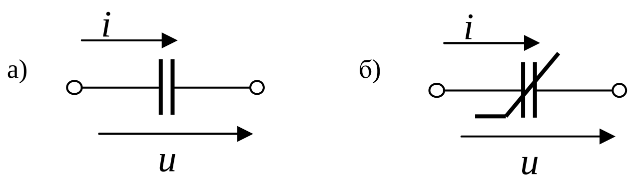


Рис. 1.5

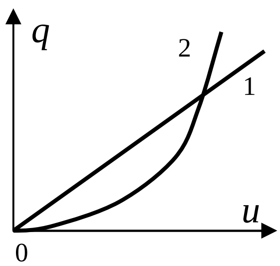


Рис. 1.6

ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Постоянным называется ток, не изменяющийся во времени. Ток - это упорядоченное движение частиц, несущих на себе электрический заряды (электроны или ионы).

Изображение электрической цепи на рисунке с помощью условных знаков называется электрической схемой.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ ИСТОЧНИКОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Применительно к источникам связь между током и напряжением $U(I)$ (ВАХ источника) называется нагрузочной или внешней характеристикой и имеет вид (рис. 1.7). Характеристика задаётся двумя точками, поэтому источники электрической энергии можно охарактеризовать двумя параметрами:

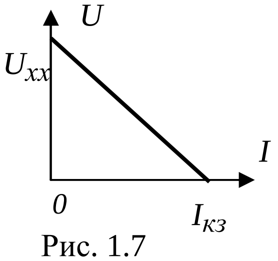


Рис. 1.7

U_{xx} и $r_{вн}$, тогда

$U = U_{xx} - r_{вн} I;$

или $I_{кз}$ и $g_{вн} = (r_{вн})^{-1}$, тогда

$I = I_{кз} - g_{вн} U.$

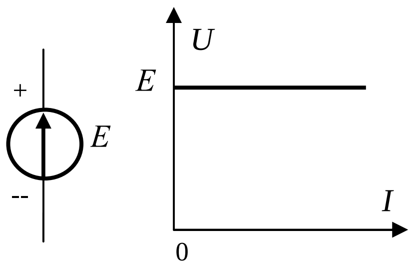


Рис. 1.8

Если $r_{вн} \to 0,\ U \to U_{xx} = E$, получаем идеальный источник ЭДС (рис. 1.8), у которого

$$r_{вн} = 0; \quad U = U_{xx} = E = const; \quad I = var$$

Источник ЭДС – устройство с двумя зажимами, напряжение на которых равно по величине ЭДС и не зависит от тока, протекающего через источник.

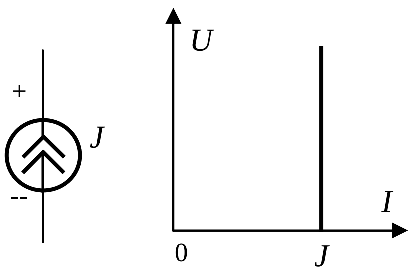


Рис. 1.9

Если $r_{вн} \to \infty,\ I \to I_{кз} = J,$ получаем идеальный источник тока (рис. 1.9), у которого

$$r_{вн} = \infty; \quad I = I_{кз} = J = const; \quad U = var$$

Источник тока – устройство с двумя зажимами, обеспечивающее в ветви, в которой оно находится, ток равный току источника, независимо от напряжения на нем.

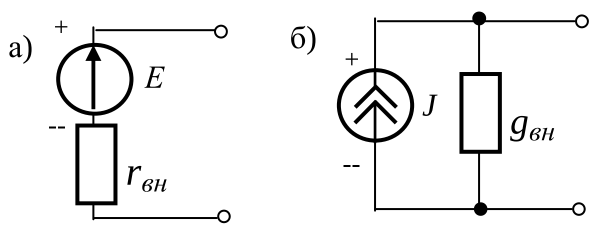


Рис. 1.10

Реальный источник может быть представлен одной из двух схем замещения, представленных на рис. 1.10.

От одной схемы можно перейти к другой через соотношения:

$$g_{вн} = (r_{вн})^{-1}; \quad E = r_{вн} J, \quad J = g_{вн} E.$$

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Ветвью называется участок цепи из последовательно соединенных элементов, по которому протекает один и тот же ток.

Узел – это точка цепи, в которой соединяются не менее трёх ветвей.

Контур– это замкнутый путь, проходящий через последовательность ветвей, причём любая ветвь и любой узел встречаются в этом пути только один раз.

Контур называется независимым, если содержит хотя бы одну ветвь, не входящую в другие контуры.

Последовательным называется соединение, при котором через элементы цепи один и тот же ток.

Параллельным называется соединение, при котором к элементам приложено одно и то же напряжение.

Граф электрической цепи – это условное изображение цепи в виде узлов и соединяющих их ветвей без указания элементов в них.

На рис.1.11 представлена схема и соответствующий ей граф электрической и цепи. Узлы называются вершинами графа, а ветви– рёбрами. Если ветвям придаётся направленность, то граф называют направленным

Деревом графа называют совокупность ветвей, которая соединяет все узлы, но не образует ни одного замкнутого контура (рис. 1.11).

Дерево графа всегда содержит ветвей на единицу меньше количества узлов в схеме:

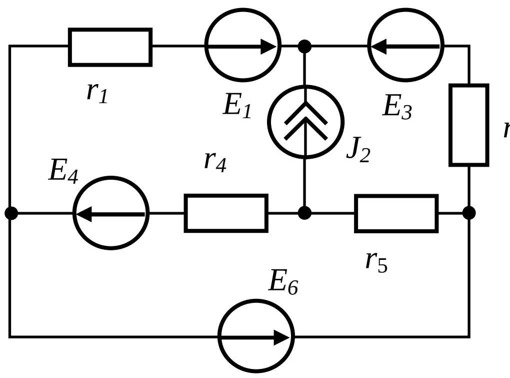
$$n_д = y - 1.$$

Каждая ветвь, не вошедшая в дерево, называется ветвью связи и образует с деревом контур.

На графе (рис.1.11) сплошными линиями показаны ветви дерева, а прерывистыми – ветви связи. Ветвью связи не может выбираться ветвь с источником тока.

Независимый контур может содержать только одну ветвь связи, а остальная часть контура состоит из ветвей дерева. Поэтому число независимых контуров цепи определяется числом ветвей связи, то есть

$$n_{конт} = n_{вс} = в - (y - 1).$$



у =4 –количество узлов

в=5 – количество ветвей с неизвестными токами

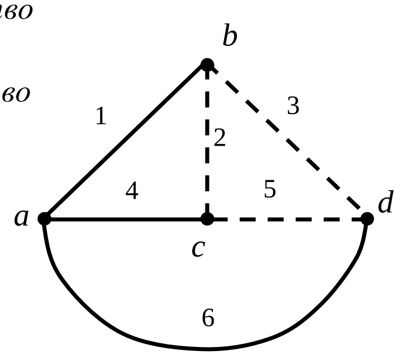
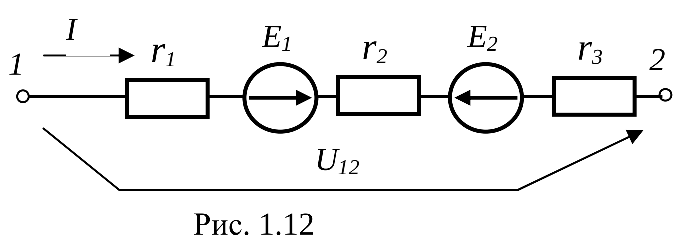


Рис. 1.11

ПРОСТЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И СООТНОШЕНИЯ.

Закон Ома для участка цепи с источником ЭДС (рис. 1.12) имеет вид:



$$I = \frac{U_{12} \pm \Sigma E_i}{\Sigma r_q} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1 - E_2}{r_1 + r_2}$$

Рис. 1.12

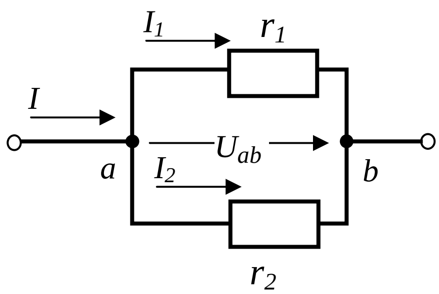


Рис. 1.13

Распределение токов в 2-х параллельных ветвях, не содержащих источники:

- ток после разветвления, равен произведению общего тока на сопротивление соседней ветви, делённому на сумму сопротивлений этих ветвей.

Для схемы на рис. 1.13

$$I_1 = I\ \frac{r_2}{r_1 + r_2}\ ; \qquad I_2 = I\ \frac{r_1}{r_1\ +\ r_2}\ .$$

Вывод основан на законе Ома:

$$U_{ab} = I\ \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\ ; \quad I_1 = U_{ab}/r_1; \quad I_2 = U_{ab}/r_2.$$

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Электрическая цепь называется сложной, если она содержит несколько источников (более одного), которые расположены в разных ветвях. Расчет токов в сложной цепи невозможно выполнить по закону Ома, для их определения необходимо воспользоваться одним из методов расчета сложных цепей.

МЕТОД ЗАКОНОВ КИРХГОФА (МЗК)

Метод основан на применении законов Кирхгофа .

Первый закон Кирхгофа : алгебраическая сумма токов в узле равна нулю :

$$\Sigma \pm I=0.$$

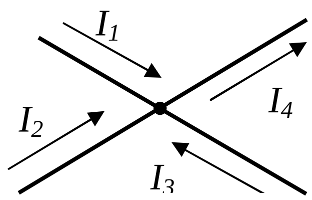


Рис. 1.14

$$- I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0 \qquad \text{(рис. 1.14)}$$

Вторая редакция : Сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов выходящих из узла : $I_1 + I_2 + I_3 = I_4$

1-й закон Кирхгофа следует из принципа непрерывности тока, согласно которому в узле заряды накапливаться не могут.

Количество независимых уравнений по 1-му закону Кирхгофа равно $(у\text{-}1)$, где $у$ - количество узлов в схеме.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений на элементах контура цепи, равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре :

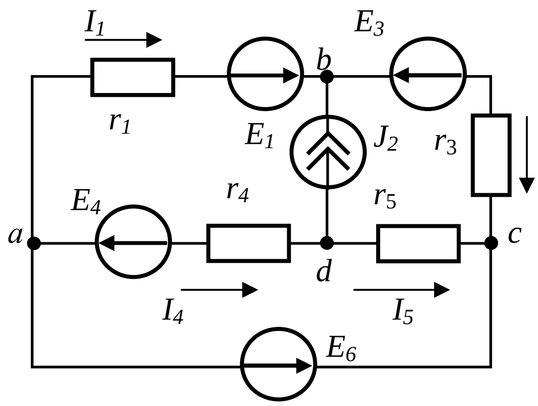


Рис. 1.15

$$\sum \pm U = \sum \pm E$$

Если направление напряжения или ЭДС совпадает с направлением обхода контура, то слагаемое записывается с "плюсом", в противном случае – с "минусом".

Для контура, проходящего по пути : узел a, 1-я ветвь, узел b, 3-я ветвь, узел c, 5-я ветвь, узел d, 4-я ветвь (рис. 1.15) уравнение имеет вид:

$$I_1\,r_1 + I_3\,r_3\ - I_5\,r_5\ - I_4\,r_4 = E_1 - E_3\ + E_4$$

Количество независимых уравнений по 2-му закону Кирхгофа равно $[в\ \text{-}\ (у\text{-}1)]$, где : $в$ - количество ветвей с неизвестными токами.

Порядок расчета по МЗК

1.) Выбираются положительные направления токов во всех ветвях;
2.) Для узлов схемы составляются уравнения по первому закону Кирхгофа;
3.) Выбираются независимые контуры (с помощью графа цепи);
4.) Недостающее число уравнений составляется по второму закону Кирхгофа;
5.) Решается полученная система уравнений относительно неизвестных токов.

Пример. Рассчитать токи ветвей в схеме рис. 1.16, используя для расчета МЗК, если известны величины: E_1 , E_3 , E_6 , r_1, r_2 , r_3 , r_4 , r_5, r_6

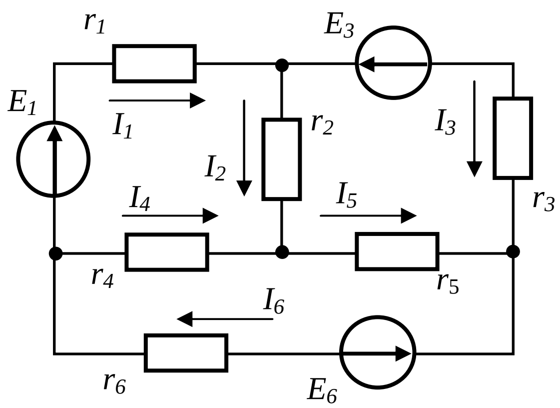


Рис. 1.16

Уравнения по 1-му закону Кирхгофа :

$$
\begin{aligned}
&I_6 - I_4 - I_1 = 0 , \\
&I_1 - I_2 - I_3 = 0 , \qquad (1) \\
&I_3 + I_5 - I_6 = 0.
\end{aligned}
$$

Уравнения по 2-му закону Кирхгофа :

$$
\begin{aligned}
&I_1 r_1 + I_2 r_2 - I_4 r_4 = E_1 , \\
&I_3 r_3 - I_5 r_5 - I_2 r_2 = - E_3 , \qquad (2) \\
&I_4 r_4 + I_5 r_5 + I_6 r_6 = - E_6 .
\end{aligned}
$$

Совместное решение уравнений (1) и (2) дает значения токов ветвей.

МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ (МКТ)

МКТ основан на решении контурных уравнений (уравнений по 2-му закону Кирхгофа для контурных токов). Этот метод позволяет сократить число необходимых для решения уравнений до количества уравнений по 2-му закону Кирхгофа.

Используем схему и уравнения, составленные по МЗК в рассмотренном выше примере (рис. 1.16), для чего исключим из уравнений (1) токи ветвей дерева I_2, I_4 и I_5 :

$$I_4 = I_6 - I_1 , \qquad I_2 = I_1 - I_3 , \qquad I_5 = - I_3 + I_6 ,$$

и подставим их в уравнения (2) :

$$
\begin{aligned}
&I_1 r_1 + I_1 r_2 - I_3 r_2 - I_6 r_4 + I_1 r_4 = E_1 , \\
&I_3 r_3 + I_3 r_5 - I_6 r_5 - I_1 r_2 + I_3 r_2 = - E_3 , \\
&I_6 r_4 - I_1 r_4 - I_3 r_5 + I_6 r_5 + I_6 r_6 = - E_6 .
\end{aligned}
$$

Обозначим : $I_1 = I_I$, $I_3 = I_{II}$, $I_6 = I_{III}$.

Тогда :

$$
\begin{aligned}
&I_I (r_1 + r_2 + r_4) - I_{II} r_2 - I_{III} r_4 = E_1 , \\
&I_{II} (r_2 + r_3 + r_5) - I_I r_2 - I_{III} r_5 = - E_3 , \qquad (3) \\
&I_{III} (r_4 + r_5 + r_6) - I_I r_4 - I_{II} r_5 = - E_6 .
\end{aligned}
$$

где : I_I , I_{II} , I_{III} - контурные токи.

Контурные уравнения (3) представляют собой 2-й закон Кирхгофа для контурных токов. В левой части уравнения учитываются падения напряжения в контуре от протекания собственного контурного тока и контурных токов смежных контуров, а в правой части уравнения – ЭДС источников, находящихся в контуре.

Порядок расчета по МКТ:

1. Выбираются независимые контуры, для чего составляется граф цепи;
2. Вводятся контурные токи и выбираются их направления;

3. Составляются контурные уравнения для контуров с неизвестными контурными токами (если в контуре есть источник тока – контурный ток известен и равен току источника и уравнение для этого контура не составляется);
4. Решается система контурных уравнений и определяются контурные токи;
5. Выбираются положительные направления токов ветвей и проводится их расчет (токи ветвей связи равны соответствующим контурным, токи ветвей дерева определяются алгебраическим суммированием соответствующих контурных).

Количество уравнений по МКТ равно $в–(у–1)$, где $в$ - количество ветвей с неизвестными токами, . $у$ – количество узлов.

<u>Пример</u> . Рассчитать токи в схеме (рис.1.17) методом контурных токов, если известны величины: E_1 , E_6 , J_2 , $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$.

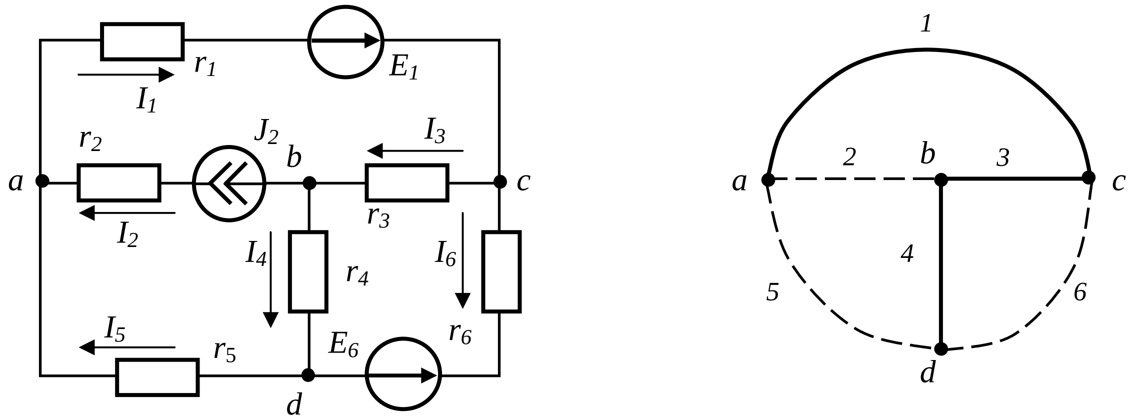


Рис. 1.17

В соответствии с выбранным графом цепи (рис.1.17 , ветви дерева показаны сплошными линиями, ветви связи - пунктирными), вводим контурные токи для контуров:

I контур - <u>узел a, ветвь 1, узел c, ветвь 3, узел b, ветвь 2, узел</u> a,

II контур - <u>узел a, ветвь 1, узел c, ветвь 3, узел b, ветвь 4, узел d, ветвь 5, узел</u> a,

III контур - <u>узел b, ветвь 3, узел c, ветвь 6, узел d, ветвь 4, узел b</u>.

Составляем контурные уравнения, учитывая, что в контуре I контурный ток известен:

$I_I = J_2$,

$I_{II} (r_1+ r_3+ r_4+ r_5) + I_I (r_1+ r_3) – I_{III} (r_3 + r_4) = E_1$,

$I_{III} (r_3+ r_4+ r_6) - I_I r_3 – I_{II} (r_3 + r_4) = - E_6$,

Решение полученной системы дает значения контурных токов I_{II}, I_{III} .

Выбираем положительные направления токов ветвей и определяем их в виде алгебраической суммы соответствующих контурных токов (с учетом их направления):

$$I_1 = I_I + I_{II} , \quad I_2 = I_I = J_2 , \quad I_3 = I_I + I_{II} - I_{III} ,$$
$$I_4 = I_{II} - I_{III} , \quad I_5 = I_{II} , \quad I_6 = I_{III} .$$

<u>МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ</u>

Метод наложения основан на принципе наложения : токи ветвей определяются суммированием составляющих токов, каждая из которых вызвана воздействием только одного источника энергии.

$$I_n = I_n^{(I)} + I_n^{(II)} + I_n^{(III)} + \dots + I_n^{(k)} ,$$

где : $I_n^{(k)}$ - ток n–ой ветви от воздействия k–го источника.

Определим токи в схеме (рис.1.18) используя метод законов Кирхгофа:

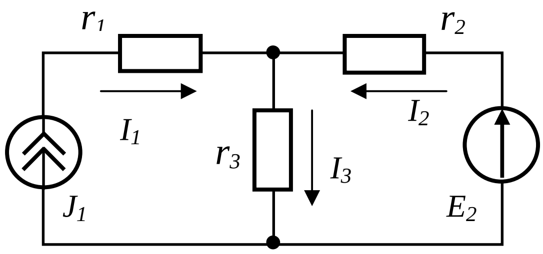


Рис. 1.18

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$; $I_2 r_2 + I_3 r_3 = E_2$

$I_3 = I_1 + I_2$; $I_2 r_2 + I_1 r_3 + I_2 r_3 = E_2$,

$I_1 = J_1$

$I_2 = E_2 / (r_2 + r_3) - J_1 r_3 / (r_2 + r_3)$

$I_3 = E_2 / (r_2 + r_3) - J_1 r_2 / (r_2 + r_3)$

Решение показывает, что токи слагаются из двух составляющих, соответствующих воздействиям источников J_1 и E_2 в схемах, где они действуют в отдельности:

$$I_1 = I_1^I + I_1^{II}, \qquad I_2 = I_2^I + I_2^{II}, \qquad I_3 = I_3^I + I_3^{II}$$

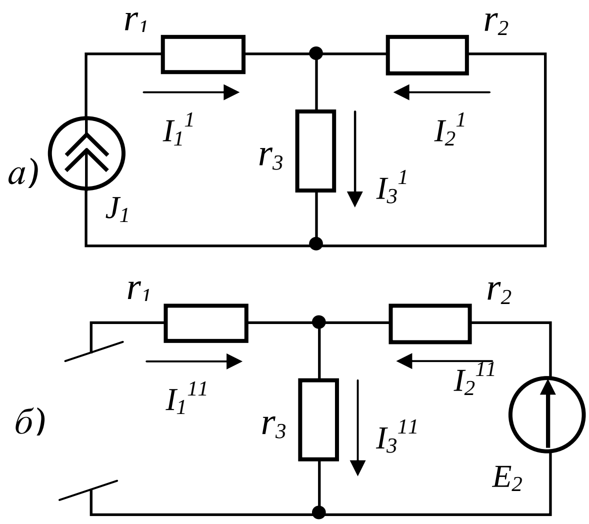


Рис. 1.19

На рис. 1.19 *а* и *в* показаны схемы, соответствующие такому разделению и ниже дан расчет составляющих токов:

$I_1^1 = J_1$,

$I_2^1 = J_1 r_3 / (r_2 + r_3)$,

$I_3^1 = J_1 r_2 / (r_2 + r_3)$.

$I_1 = 0$,

$I_2^1 = E_2 / (r_2 + r_3)$,

$I_3^1 = E_2 / (r_2 + r_3)$.

<u>Порядок расчета методом наложения</u>

1. Выбираются положительные направления токов в ветвях;
2. Проводится расчет составляющих токов ветвей от воздействия каждого источника в отдельности, для чего поочередно в схеме оставляется только один источник, а остальные источники заменяются их внутренним сопротивлением.
3. Токи ветвей определяем путем алгебраического суммирования составляющих, создаваемых каждым источником в отдельности с учетом их направления в исходной схеме и в схемах с каждым источником.

Метод наложения, как правило, предполагает использование закона Ома для расчета составляющих токов, так как в каждом случае расчета в схеме имеет место лишь один источник. Метод наложения можно использовать только в линейных цепях для расчета токов, но нельзя применять для расчета мощностей в этих цепях, так как мощность связана с напряжением или током квадратичной, а не линейной зависимостью.

<u>Пример .</u> Рассчитать токи ветвей схемы (рис. 1.20 *а*) по методу наложения, если известно: E_1 , J_5 , r_2 , r_3 , r_4 , r_5 .

В исходной схеме выбираем положительное направление токов ветвей. Расчет составляющих токов выполняем в соответствии со схемами на рис. 1.20 *б* и *в* .

Составляющие токов от воздействия источника J_5 рассчитываем для схемы (рис.1.20 *б*), в которой ветвь с источником ЭДС представляем закороткой, так как его сопротивление равно нулю:

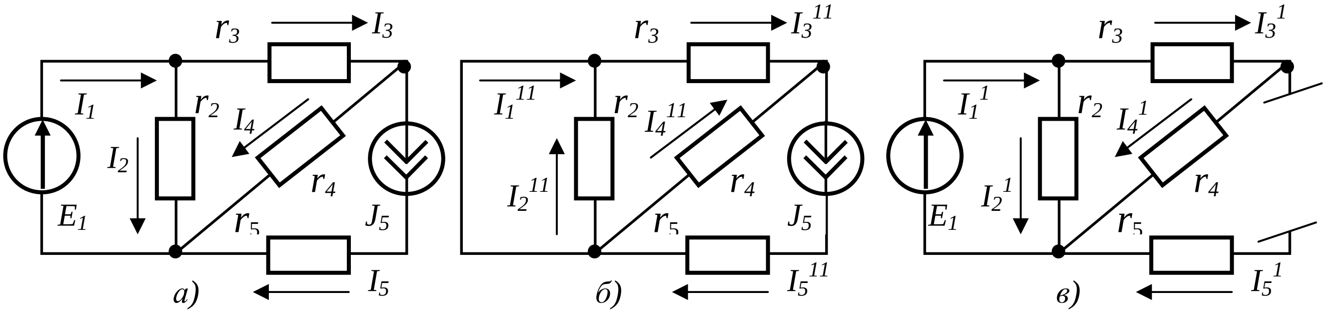


Рис.1.20

$$I_5^{I1} = J_5\ ,\quad I_2^{I1} = 0\ ,\quad I_1^{11} = I_3^{I1} = J_5\ r_4/(r_3 + r_4)\ ,\quad I_4^{11} = J_5\ r_3/(r_3 + r_4)\ ,$$

Составляющие токов от воздействия источника E_1 рассчитываем для схемы (рис.1.20 *в*), в которой разрываем ветвь с источником тока, так как его внутреннее сопротивление бесконечно велико:

$$I_2^{I} = E_1/r_2\ ,\quad I_3^{1} = I_4^{I} = E_1/(r_3 + r_4)\ ,\quad I_1^{1} = I_2^{I} + I_3^{I}\ ,\quad I_5^{1} = 0\ .$$

Токи исходной схемы схемы записываем согласно принципу наложения:

$$I_1 = I_1^{I} + I_1^{II}\ ,\quad I_2 = I_2^{I} - I_2^{II}\ ,\quad I_3 = I_3^{I} + I_3^{II}\ ,\quad I_4 = I_4^{I} - I_4^{II}\ ,\quad I_5 = I_5^{I} + I_5^{II}$$

МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ (МУП)

Метод заключается в определении относительных потенциалов узлов схемы на основе 1-го закона Кирхгофа и применении закона Ома для определения токов ветвей. Этот метод позволяет сократить число необходимых для решения уравнений до количества уравнений по 1-му закону Кирхгофа.

При этом используются следующие положения: - токи в ветвях зависят от разности потенциалов цепи, а не от их абсолютных значений; - если один из узлов схемы заземлить, то есть принять его потенциал равным нулю, то токи в схеме не изменятся.

Рассмотрим схему рис.1.21, в которой примем потенциал узла d равным нулю

$$\varphi_d = 0\ .$$

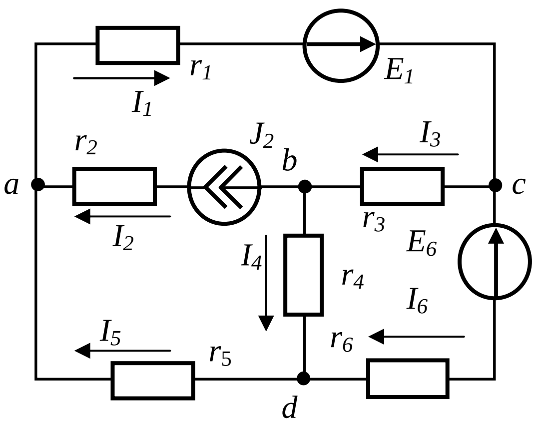


Рисунок 1.21

Для узлов с неизвестными потенциалами (a, b, c) запишем уравнения по 1 –му закону Кирхгофа:

узел « a » : $I_1 - I_2 - I_5 = 0$,

узел « b » : $I_4 + I_2 - I_3 = 0$, (4)

узел « c » : $I_3 + I_6 - I_1 = 0$.

Запишем по закону Ома выражения для токов ветвей, предварительно выбрав их положительные направления :

$$I_1 = ((\varphi_a - \varphi_c) + E_1)\ 1/r_1\ ,\quad I_2 = J_2\ ,\quad I_3 = (\varphi_c - \varphi_b)\ 1/r_3\ ,$$
$$I_4 = (\varphi_b - \varphi_d)\ 1/r_4\ ,\quad I_5 = (\varphi_d - \varphi_a)\ 1/r_5\ ,\quad I_6 = ((\varphi_c - \varphi_d) - E_6)\ 1/r_6\ . \qquad (5)$$

Подставим уравнения (5) в уравнения (4).

$$((\varphi_a - \varphi_c) + E_1)\ 1/r_1 - J_2 - (\varphi_d - \varphi_a)\ 1/r_5 = 0\ ,$$

$$(\varphi_b - \varphi_d)\,1/r_4 + J_2 - (\varphi_c - \varphi_b)\,1/r_3 = 0\,,$$
$$(\varphi_c - \varphi_b)\,1/r_3 + ((\varphi_c - \varphi_d) - E_6)\,1/r_6 - ((\varphi_a - \varphi_c) + E_1)\,1/r_1 = 0\,.$$

$$\varphi_a\,(1/r_1 + 1/r_5) - \varphi_c\,1/r_1 = -E_1\,1/r_1 + J_2\,,$$
$$\varphi_b\,(1/r_3 + 1/r_4) - \varphi_c\,1/r_3 = -J_2\,,$$
$$\varphi_c\,(1/r_1 + 1/r_3 + 1/r_6) - \varphi_a\,1/r_1 - \varphi_b\,1/r_3 = E_1\,1/r_1 + E_6\,1/r_6\,.$$

Или в другом виде :

$$\varphi_a\,(g_1 + g_2 + g_5) - \varphi_b\,g_2 - \varphi_c\,g_1 = -E_1\,g_1 + J_2\,,$$
$$\varphi_b\,(g_2 + g_3 + g_4) - \varphi_a\,g_2 - \varphi_c\,g_3 = -J_2\,, \qquad (6)$$
$$\varphi_c\,(g_1 + g_3 + g_6) - \varphi_a\,g_1 - \varphi_b\,g_3 = E_1\,g_1 + E_6\,g_6\,.$$

Уравнения (6) называются узловыми и записываются следующим образом :

-потенциал узла, для которого составляется уравнение, умножается на собственную проводимость узла (сумма проводимостей всех ветвей, примыкающих к узлу), далее следуют с отрицательным знаком потенциал другого узла, умноженный на сумму проводимостей всех ветвей соединяющих этот узел с узлом, для которого составляется уравнение, далее с отрицательным знаком потенциал следующего узла, умноженный на сумму проводимостей всех ветвей соединяющих этот узел с узлом, для которого составляется уравнение и т.д..

В правой части этих уравнений записываются суммарные узловые токи (сумма токов короткого замыкания ветвей сходящихся в узле, для которого составляется уравнение).

Ток короткого замыкания ветви с источником ЭДС равен произведению ЭДС на проводимость ветви. Ток короткого замыкания ветви с источником тока равен по величине току источника. Ток короткого замыкания ветви без источников равен нулю. Со знаком плюс записываются токи короткого замыкания направленные к узлу, а со знаком минус – от узла.

<u>Порядок расчета</u>

1. Потенциал одного из узлов схемы принимается равным нулю.
2. Записываются узловые уравнения для узлов с неизвестными потенциалами.
3. Решается полученная система узловых уравнений и определяются неизвестные потенциалы узлов.
4. Выбираются положительные направления токов в ветвях схемы, и по закону Ома определяется их величина.

Примечание : Если в схеме есть ветвь с источником ЭДС без сопротивления, то принимать равным нулю можно лишь потенциал одного из узлов, к которым присоединена эта ветвь, тогда сразу можно вычислить потенциал другого узла и в этом случае узловое уравнение для него не составляется.

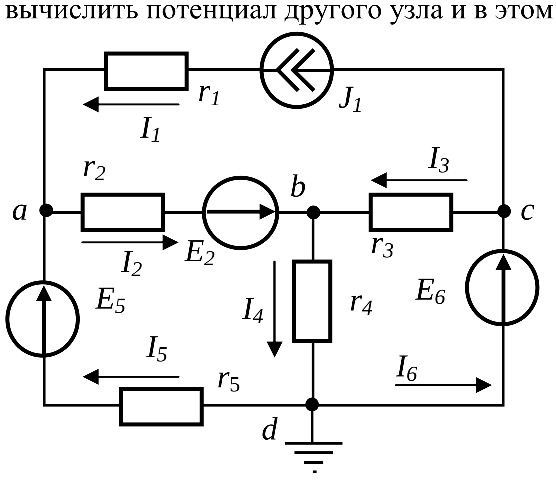


Рис.1.22

<u>Пример .</u> Рассчитать токи ветвей схемы (рис. 1.22) используя метод узловых потенциалов, если известно : E_2 , E_5 , E_6 , J_1 , r_1 , r_2 , r_3 , r_4 , r_5 Примем потенциал одного из узлов равным нулю (учитывая, что в 6-ой ветви источник ЭДС без сопротивления)

$$\varphi_d = 0, \quad \text{тогда} \quad \varphi_c = E_6\,.$$

Составим узловые уравнения для узлов с неизвестными потенциалами (a , b) . Учитывая, что проводимость 1-ой ветви равна нулю (источник тока имеет бесконечно большое внутреннее сопротивление) получим :

$$\varphi_a\,(1/r_2 + 1/r_5) - \varphi_b\,1/r_2 = -E_2\,1/r_2 + E_5\,1/r_5 + J_1\,,$$
$$\varphi_b\,(1/r_2 + 1/r_3 + 1/r_4) - \varphi_a\,1/r_2 - \varphi_c\,1/r_3 = E_2\,1/r_2\,.$$

Решение полученной системы уравнений относительно неизвестных потенциалов узлов дает значения : φ_a и φ_b. Далее произвольно выбираем положительные направления токов ветвей и используя закон Ома определяем их величины :

$$I_2 = (\varphi_a - \varphi_b + E_2)/r_2 \quad , \quad I_3 = (\varphi_c - \varphi_b)/r_3 \quad ,$$
$$I_4 = \varphi_b / r_4 \quad , \qquad I_5 = -\varphi_a + E_5)/r_5 \quad ,$$

Ток 1-ой ветви равен току источника $I_1 = J_1$, а ток в ветви с источником ЭДС без сопротивления определяем по 1-му закону Кирхгофа : $I_6 = I_1 + I_3$.

Если схема содержит два узла, то МУП называют методом двух узлов (частный случай МУП). Так как в схеме два узла, а потенциал одного из них принят равным нулю, то записывая узловое уравнение, находим узловое напряжение, которое может быть записано сразу одной формулой :

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{J_\Sigma}{\Sigma g} = \frac{\pm\sum E\frac{1}{r} \pm\sum J}{\sum \frac{1}{r}} .$$

Токи в дальнейшем определяются по закону Ома.

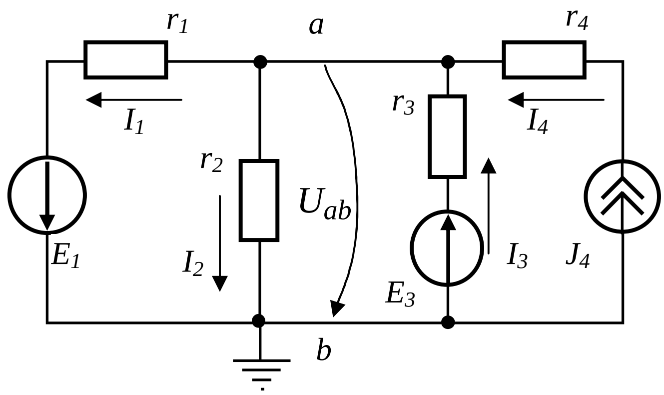


Рис. 1.23

Пример. Рассчитать токи ветвей схемы (рис. 1.23) используя метод двух узлов, если известно : E_1 , E_3 , J_4 , r_1 , r_2 , r_3 , r_4 .
Согласно методу двух узлов :

$$U_{ab} = \frac{-E_1\frac{1}{r_1} + E_2\frac{1}{r_2} + J_4}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}} .$$

$$I_1 = (U_{ab} + E_1)/r_1 \quad , \qquad I_2 = U_{ab}/r_2 \quad , \qquad I_3 = (E_3 - U_{ab})/r_3 \quad , \qquad I_4 = J_4 \; .$$

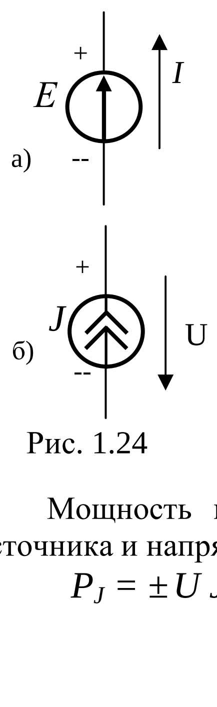


Рис. 1.24

Баланс мощностей

В соответствии с законом сохранения энергии, энергия вырабатываемая источниками потребляется приемниками. Так как мощность определяется как энергия в единицу времени, то алгебраическая сумма мощностей источников равняется сумме мощностей приемников и баланс мощностей записывается следующим образом:

$$\Sigma P_{ист} = \Sigma P_{потр}$$

Мощность источника ЭДС (рис. 1.24а) определяется произведением величины ЭДС источника и тока, протекающего через источник :

$P_E = \pm E\,I$, причем со знаком «+», если направления E и I совпадают.

Мощность источника тока (рис. 1.24б) определяется произведением величины тока источника и напряжением на его зажимах :

$P_J = \pm U\,J$, причем со знаком «+», если направления U и I противоположны.

Знак “ - “ у мощности источника означает, что источник не вырабатывает, а потребляет энергию.

Мощность приемника определяется по закону Джоуля-Ленца и численно равна произведению квадрата тока на величину сопротивления приемника : $I^2 r$.

Тогда окончательно для цепи получим : $\pm\sum EI \pm\sum UJ = \sum I^2 r$.

Баланс мощностей проверяется для определения правильности решения задачи определения токов исходной схемы и в случае, когда баланс «сходится» - задача решена верно.

Потенциальная диаграмма (ПД)

ПД строится для контура и представляет собой зависимость потенциалов точек контура от сопротивления.

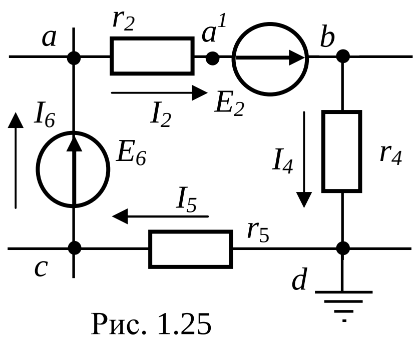


Рис. 1.25

ПД строится по результатам расчёта цепи и имеет следующий порядок построения :

1. Потенциал одной из точек контура принимается равным нулю (на ПД ей соответствует начало координат);
2. Вычисляются потенциалы всех точек контура.
3. В соответствии с выбранным направлением обхода контура последовательно в декартовой системе координат наносятся точки, которые затем соединяются ломаной линией.

Задача. Построить потенциальную диаграмму для контура $a - b - c - d$, если известны параметры цепи и рассчитаны токи ветвей

Примем потенциал одного из узлов равным нулю

$$\varphi_d = 0.$$

Тогда потенциалы других точек схемы определяем по 2-му закону Кирхгофа :

$$\varphi_c = \varphi_d - I_5 r_5 ,$$
$$\varphi_a = \varphi_c + E_6 ,$$
$$\varphi_{a^1} = \varphi_a - I_2 r_2 ,$$
$$\varphi_b = \varphi_{a^1} + E_2 ,$$
$$\varphi_d = \varphi_b - I_4 r_4 = 0 .$$

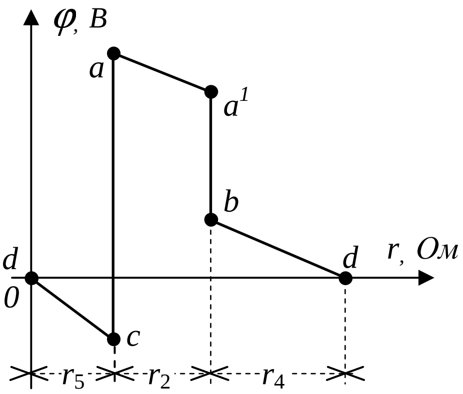


Рис. 1.26

На рис.1.26 показана потенциальная диаграмма для контура $a - b - c - d$ (рис.1.25)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Преобразование - это эквивалентная замена схемы одного вида схемой другого вида. Рациональное преобразование приводит к уменьшению числа ветвей или (и) узлов, а значит и к уменьшению числа уравнений, определяющих состояние цепи. Во всех видах преобразования необходимо выполнять условие эквивалентности, т.е. условие неизменности напряжений и токов в той части цепи, которая не затронута преобразованием. Если преобразуется пассивная часть цепи, т.е. не содержащая источников энергии, то мощность в исходной схеме и преобразованной одинаковы. При преобразовании активной части цепи (содержащей источники) указанные мощности могут отличаться.

ЗАМЕНА ПАРАЛЛЕЛЬНО ВКЛЮЧЕННЫХ ВЕТВЕЙ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ

Если в схеме имеется одна или несколько параллельно включенных ветвей, то ее расчет существенно упрощается, если каждую из них заменить эквивалентными ветвями. Процесс замены группы параллельно включенных ветвей одной эквивалентной рассмотрим на конкретном примере. Пусть в схеме имеется группа, состоящая из 4 параллельных ветвей, которую выделим отдельно. Остальную часть цепи, в общем случае содержащую источники энергии, будем считать «черным ящиком» (рис.1.27)

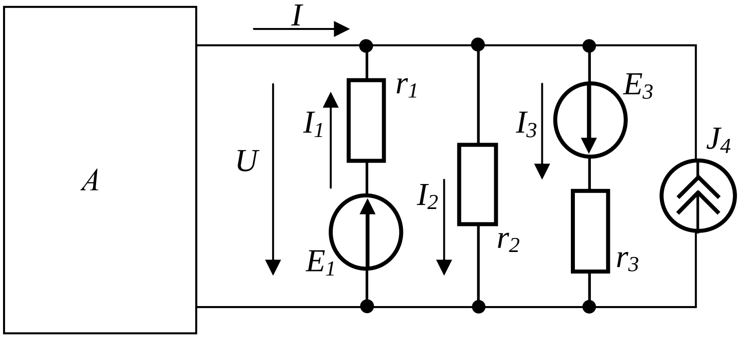


Рис. 1.27

Для исходной схемы по закону Ома :

$I_1 = (-U+E_1)/r_1 = (E_1 - U)g_1$,

$I_2 = U/r_2 = U\,g_2$,

$I_3 = (U+E_3)/R_3 = (U+E_3)g_3$,

По первому закону Кирхгофа:

$$I + I_1 - I_2 - I_3 + J_4 = 0 ,$$

$$I = -I_1 + I_2 + I_3 - J_4 ,$$

$$I = (U-E_1)g_1 + Ug_2 + (U+E_3)g_3 - J_4 ,$$

$$I = U(g_1+g_2+g_3) - E_1 g_1 + E_3 g_3 - J_4 .$$

Для преобразованной схемы (рис.1.28): $I = (U+E)/r = U\,g + E\,g$, где $g = 1/r$

Сравнивая две последние формулы, получим:

$$g = g_1+g_2+g_3 , \quad Eg = -E_1 g_1 + E_3 g_3 - J_4 ,$$

$$E = (-E_1 g_1 + E_3 g_3 - J_4)/g .$$

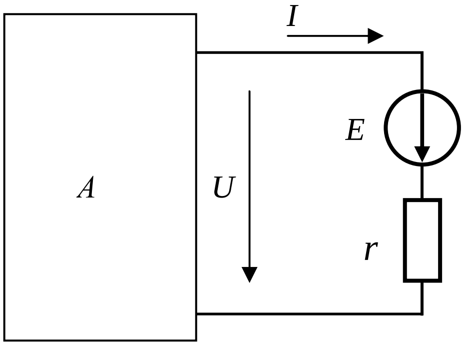


Рис. 1.28

В общем случае формулы для расчета параметров эквивалентной ветви имеют вид:

$$r = 1/g , \quad g = \sum g_к ; \quad E = (\pm\sum E_k g_k \pm \sum J_k) / g .$$

В последней формуле слагаемые берутся с плюсом, если ЭДС (ток источника тока) направлена к тому же узлу, что и эквивалентная ЭДС.

ЗАМЕНА СОПРОТИВЛЕНИЯ С ИЗВЕСТНЫМ ТОКОМ ИСТОЧНИКОМ ЭДС (ТЕОРЕМА О КОМПЕНСАЦИИ)

Рассмотрим активный двухполюсник (А). к которому подключена ветвь с сопротивлением r с известным током I (рис. 1.29 а).

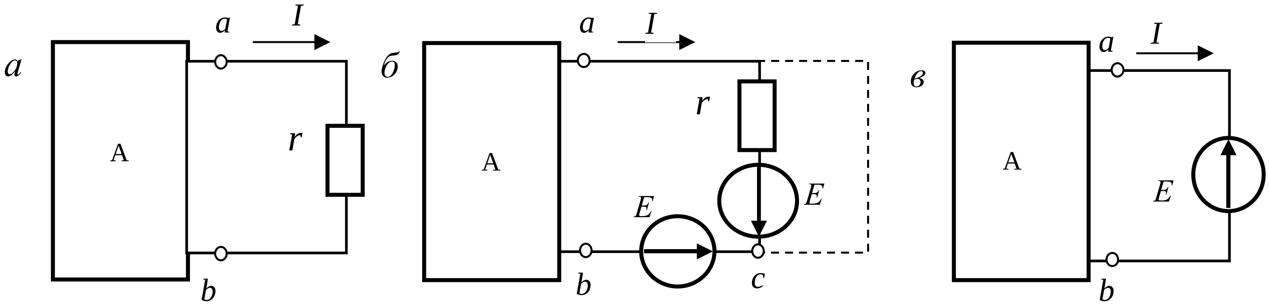


Рис. 1.29

Включим в эту ветвь два встречно направленных источника $E = I\,r$. Эти источники компенсируют друг друга, поэтому ток в ветви не изменится (рис. 1.29 б).

При переходе из точки a в c потенциал не изменяется :

$$\varphi_c = \varphi_a - I\ r + E = \varphi_a - I\ r + I\ r = \varphi_a$$

А так, как точки a и c одно-потенциальные, то их можно закоротить (пунктирная линия) и перейти к следующей схеме (рис. 1.29 в), которая эквивалентна исходной.

Тогда следует вывод, что ветвь с сопротивлением, по которому протекает известный ток, можно заменить источником с ЭДС равной произведению тока на сопротивление и направленной встречно току (рис. 1.30)

.

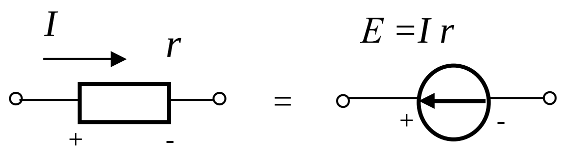


Рис. 1.30

ПЕРЕНОС ИСТОЧНИКОВ В СХЕМЕ

Из уравнений по *II* закону Кирхгофа следует, что токи в схеме зависят от суммарных ЭДС в контуре. Это положение обосновывает возможность переноса источников ЭДС и указывает, что переносить источники в схеме следует таким образом, чтобы суммарные ЭДС всех затронутых контуров оставались бы неизменными (рис. 1.31).
Можно и иначе сформулировать это правило: источник ЭДС может быть перенесен из какой-либо ветви во все другие, присоединённые к тому же узлу.

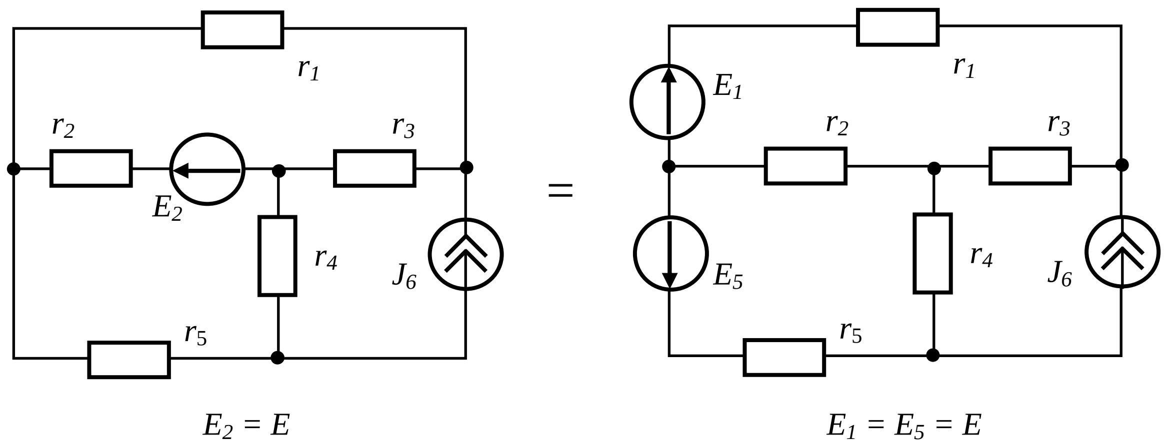


Рис. 1.31

Из уравнений по *I* закону Кирхгофа следует, что разности потенциалов определяются суммарными токами в узлах. Отсюда вытекает следующее правило переноса источников тока в схеме: источник тока может быть заменен несколькими источниками тока, подключенными параллельно всем ветвям, которые составляли контур с исходным источником тока (рис. 1.32).
На рис. 1.33 а,б представлены эквивалентные схемы, в которых выполнен перенос источников, соответственно:
а – для контура, проходящего через r_3 и r_4, б - для контура, проходящего через r_1 и r_5.

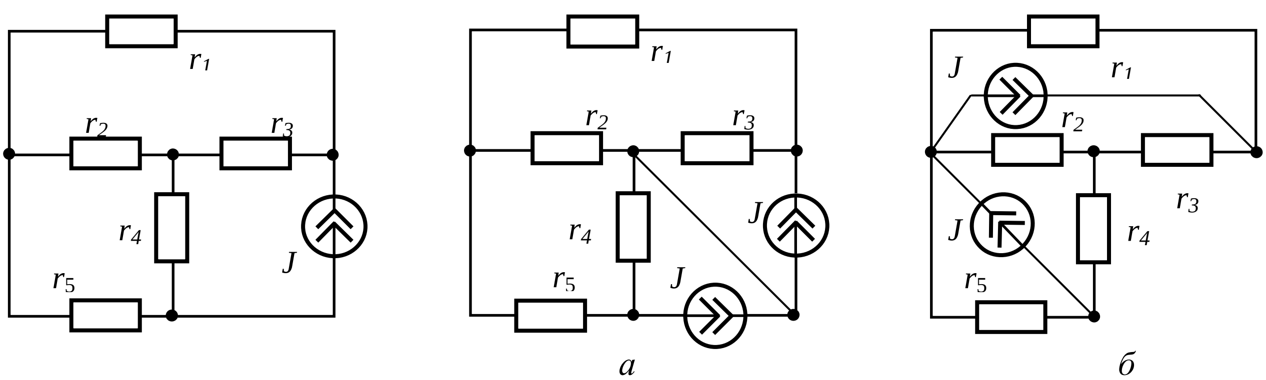


Рис. 1.32 Рис. 1.33

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАССИВНЫХ ТРЕХПОЛЮСНИКОВ

Трёхполюсник называется пассивным, если он не содержит источников электрической энергии. Среди пассивных трёхполюсников наиболее часто встречаются схемы соединения «звезда» и «треугольник»..

«Звезда» – это схема соединения трёх сопротивлений, при котором они имеют общую точку и образуют три расходящихся луча. Обозначается «*Y*» (рис. 1.34).

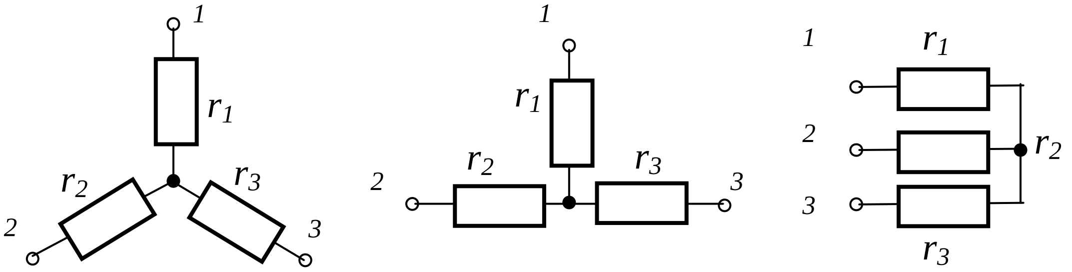


Рис. 1.34

«Треугольник» - это схема соединения сопротивлений, при котором элементы образуют геометрический треугольник. Обозначается «Δ»(рис. 1.35).

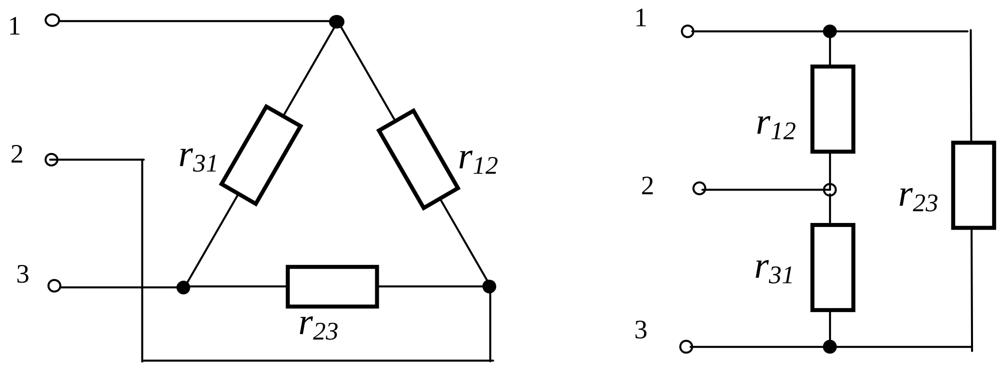


Рис. 1.35

Рассмотрим эквивалентное преобразование $Y \leftrightarrow \Delta$. Замена будет эквивалентной, если при одинаковых потенциалах одноименных полюсов звезды и треугольника токи, подходящие к этим полюсам, также одинаковы, то есть при одинаковых режимах работы сопротивления между одними и теми же парами полюсов звезды и треугольника равны.

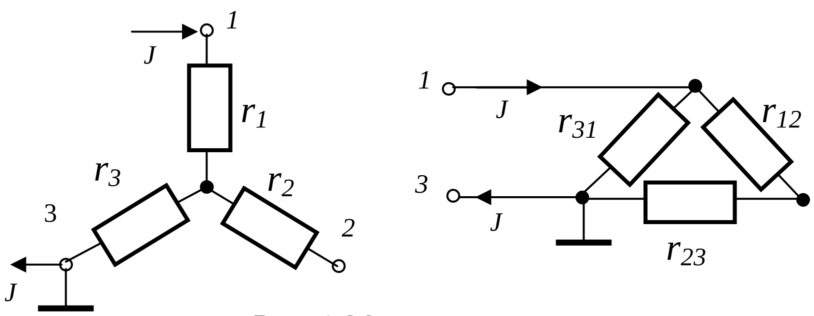


Рис. 1.36

Рассмотрим режим, при котором от внешней части схемы отсоединён, например, полюс *2* (рис. 1.36). Тогда, обозначая внешний ток, который подходит к первому полюсу и выходит из третьего через J, и принимая потенциал третьего узла равным нулю ($\varphi_3 = 0$), получаем при соединении звездой (имея в виду, что ток $I_2 = 0$)

$$\varphi_2 = r_3 J , \qquad (7)$$

а для соединения треугольником $\varphi_2 = r_{23} I_{12} = J\, r_{31}\, r_{23} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}).$ (8)

Приравнивая правые части (7) и (8), находим, что сопротивление луча звезды

$$r_3 = r_{31}\, r_{23} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}).$$

Если отсоединить от внешней схемы первый полюс или третий полюс, получим соответственно :

$$r_2 = r_{12}\, r_{23} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}), \quad r_1 = r_{12}\, r_{31} / (r_{12} + r_{23} + r_{31}).$$

Таким образом, имея выражение для сопротивления одного луча звезды, круговой заменой индексов можно получить выражения для сопротивлений двух других лучей.

Теперь рассмотрим режим, при котором два полюса, например третий и второй, закорочены (рис. 1.37). По-прежнему обозначая входной ток J, получаем, что в случае соединения звездой ток, проходящий по перемычке,

$$I_2 = \frac{Jr_3}{r_2 + r_3} = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{r_1 + r_2 r_3/(r_2 + r_3)} \frac{r_3}{r_2 + r_3} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_3) r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}, \qquad (9)$$

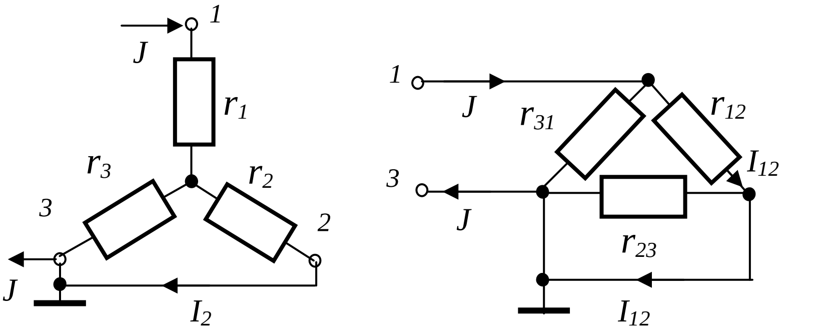


Рис. 1.37

а для соединения треугольником

$$I_{12} = (\varphi_1 - \varphi_3)/r_{12}. \qquad (10)$$

Приравнивая правые части выражений (9) и (10), получаем

$r_{12} = (r_1\, r_2 + r_2\, r_3 + r_3\, r_1) / r_3 =$
$= r_1 + r_2 + r_1\, r_2 / r_3.$

При соединении других полюсов между собой, получаем

$$r_{23} = r_2 + r_3 + r_2\, r_3 / r_1,$$
$$r_{31} = r_3 + r_1 + r_3\, r_1 / r_2.$$

Окончательно получим следующие формулы:

$\Delta \rightarrow$ Y $\quad r_1 = r_{12}\, r_{31} / (r_{12} + r_{23} + r_{31})$, $\quad r_2 = r_{12}\, r_{23} / (r_{12} + r_{23} + r_{31})$,. $\; r_3 = r_{31}\, r_{23} / (r_{12} + r_{23} + r_{31})$.

Y$\rightarrow \Delta$: $\quad r_{12} = r_1 + r_2 + r_1\, r_2 / r_3$. , $\; r_{23} = r_2 + r_3 + r_2\, r_3 / r_1$, $\; r_{31} = r_3 + r_1 + r_3\, r_1 / r_2$.

В случае, когда $r_1 = r_2 = r_3 = r_Y$ и соответственно $r_{12} = r_{13} = r_{23} = R_\nabla$, формулы преобразования принимают вид: $\quad r_\nabla = 3\, r_Y$.

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА (МЭГ)

МЭГ применяется, когда требуется определить ток только в одной ветви. Использование в этом случае МКТ или МУП является нерациональным. Ветвь, в которой требуется рассчитать ток, подключается к остальной цепи, которую принято называть двухполюсником. Различают активные (содержащие источники) и пассивные (не содержащие источников) двухполюсники. Пассивный двухполюсник может быть заменен его входным сопротивлением $r_{вх}$, которое можно определить экспериментальным путем или рассчитать по схеме двухполюсника.

МЭГ основан на теореме об активном двухполюснике :

Если активный двухполюсник, к которому подключена некоторая ветвь, заменить источником с ЭДС, равной напряжению холостого хода на зажимах двухполюсника и с сопротивлением, равным входному сопротивлению пассивного двухполюсника (образованного из активного двухполюсника), то ток в этой ветви не изменится.

Покажем, что для расчета тока I некоторой ветви (рис.1.38. схема 1) активный двухполюсник, к которому она подключается, может быть заменен эквивалентной схемой, состоящей из ЭДС и сопротивления (схема 6). С этой целью разомкнем рассматриваемую ветвь (схема 2). Тогда на разомкнутых зажимах (a , c) появится напряжение, которое принято называть напряжением холостого хода U_{xx}. Это напряжение можно либо определить экспериментальным путем, либо рассчитать (в дальнейшем будем считать U_{xx} известным). Включим между зажимами a и b источник с ЭДС E^1, которая по величине равна U_{xx} и действует в противоположном направлении (схема 3). В схеме 3 по рассматриваемой ветви ток не течет, поскольку потенциалы всех точек этой схемы такие же, как и в схеме 2, а, следовательно, и токи такие же.

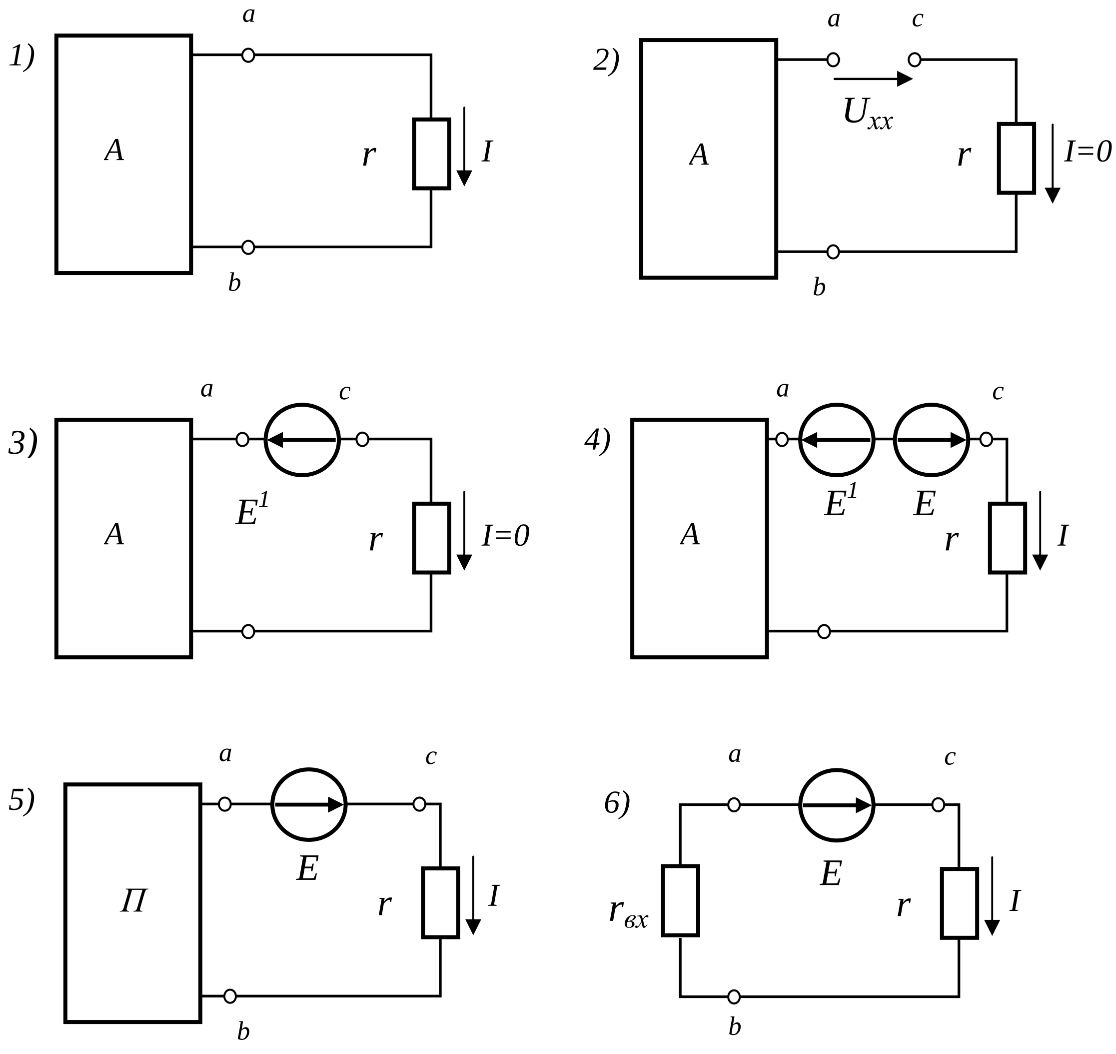


Рис. 1.38

Схема 3 отличается от исходной наличием E^1. Поэтому включим еще одну ЭДС $E = U_{xx}$ (схема 4). В схеме 4 по искомой ветви течет такой же ток, как и в исходной, поскольку потенциалы точек a и c одинаковы и эти точки могут быть соединены между собой. Искомый ток в схеме 4 можно определить по методу наложения. Составляющая тока от воздействия источников ЭДС активного двухполюсника совместно с источником E^1 равна нулю (см. схему 3). Таким образом, для определения тока достаточно определить составляющую тока от воздействия источника ЭДС E (схема 5). Пассивный двухполюсник в схеме 5 может быть заменен его входным сопротивлением $r_{вх}$ (схема 6). Если сравнить схемы 1 и 6, то можно заметить, что на месте активного двухполюсника образовалась схема, состоящая из источника с ЭДС, равной U_{xx} и с внутренним сопротивлением, равным $r_{вх}$, для которой можно применить закон Ома :

$$I = U_{xx} / (r + r_{вх})$$

<u>Порядок расчета цепей МЭГ</u>

1. Размыкается ветвь, в которой необходимо определить ток и между разомкнутыми зажимами указывается напряжение U_{xx} (его направление должно быть таким же, как и тока, который необходимо определить).

2. Каким либо методом, рассчитываются токи полученной схемы, и определяется напряжение U_{xx}.

3. Далее, определяется входное сопротивление пассивного двухполюсника относительно разомкнутых зажимов (пассивный двухполюсник образуется из активного двухполюсника, путем замены источников их внутренними сопротивлениями).

4. Рассчитывается ток по закону Ома : $I = U_{xx} /(r + r_{вх})$